OPCIÓN A

1.- Tenemos que hacer dos cuadrados de tela donde cada cuadrado se hace con una tela diferente. Las dos telas tienen precios de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado respectivamente. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100 cm? **(2,5 puntos)**

Sea **B** el lado del cuadrado realizado con la tela más barata y **C** el de la más cara

$$\begin{cases} 4B+4C=100 \Rightarrow 4\cdot(B+C)=100 \Rightarrow B+C=25 \Rightarrow B=25-C \\ P=2B^2+3C^2 \end{cases} \Rightarrow P=2\cdot(25-C)^2+3C^2 \Rightarrow$$

$$P=2\cdot\left(625-50C+C^2\right)+3C^2=1250-100C+5C^2+3C^2 \Rightarrow P=8C^2-100C-1250=2\cdot\left(4C^2-50C-625\right)\Rightarrow$$

$$P'=\frac{dP}{dC}=2\cdot(8C-50)=4\cdot(2C-25)\Rightarrow P'=0\Rightarrow 4\cdot(2C-25)=0\Rightarrow 2C-25=0\Rightarrow 2C=25\Rightarrow C=\frac{25}{2}\Rightarrow$$

$$P''=\frac{dP'}{dC}=4\cdot 2=8>0\Rightarrow Mínimo\Rightarrow\begin{cases} C=\frac{25}{2}\ cm \\ B=25-\frac{25}{2}=\frac{25}{2}\ cm \end{cases}$$

2.- Determinar una matriz **X** que verifique la ecuación: **AB – CX = I** siendo las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$AB=CX+I\Rightarrow CX=AB-I\Rightarrow C^{-1}CX=C^{-1}(AB-I)\Rightarrow IX=C^{-1}(AB-I)\Rightarrow X=C^{-1}(AB-I)$$

$$|C|=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow Existe\ C^{-1}\Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{|C|}\cdot adj\ C^t\Rightarrow C^t=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ C^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 6 & 27\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B-I=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 6 & 27\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 6 & 26\end{pmatrix}$$

$$X=C^{-1}(AB-I)=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 6 & 26\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 11 & 47\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\\ \frac{11}{2} & \frac{47}{2}\end{pmatrix}$$

3.- Estudiar la posición relativa de los planos: $\begin{cases}\alpha: 2x+3y-5z+7=0\\ \beta: 3x+2y+3z-1=0\\ \delta: 7x+8y-7z+13=0\end{cases}$

Sean π_α = (2, 3, -5), π_β = (3, 2, 3) y π_δ = (7, 8, -7) los vectores normales de los tres planos.

$$A/B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -5 & 7\\ 3 & 2 & 3 & -1\\ 7 & 8 & -7 & 13\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}2 & 3 & -5 & 7\\ 6 & 4 & 6 & -2\\ 14 & 16 & -14 & 26\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}2 & 3 & -5 & 7\\ 0 & -5 & 21 & -23\\ 0 & -5 & 21 & -23\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}2 & 3 & -5 & 7\\ 0 & -5 & 21 & -23\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

Al ser el sistema **Compatibles Indeterminado, los tres planos se cortan en una recta**.

Como π_α no proporcional a π_β (2/3 ≠ 3/2) los planos α y β se cortan.
Como π_α no proporcional a π_δ (2/3 ≠ 7/2) los planos α y δ se cortan.
Como π_β no proporcional a π_δ (3/2 ≠ 7/2) los planos β y δ se cortan. **Por tanto los tres planos son distintos y se cortan en una recta, intersección de dos cualquiera de ellos.**

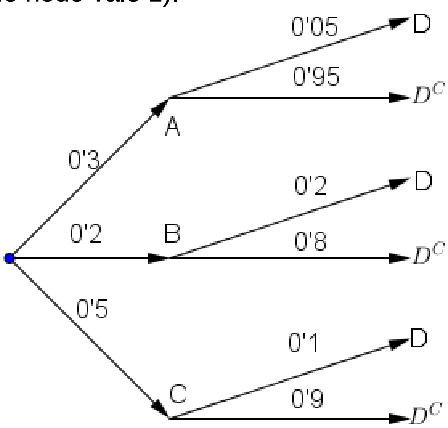
4.- Tres fábricas A, B y C, producen respectivamente el 30%, 20% y 50% de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben que son defectuosos el 5% de los motores producidos por la fábrica A, el 20% de los producidos por la fábrica B y el 10% de los que se fabrican en la C.
a) Un inspector de calidad elige un motor al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso? (1,25 puntos)
b) Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C? (1,25 puntos)

Tres fábricas A, B y C, producen respectivamente el 30%, 20% y 50% de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben que son defectuosos el 5% de los motores producidos por la fábrica A, el 20% de los producidos por la fábrica B y el 10% de los que se fabrican en la C.
a)
Un inspector de calidad elige un motor al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso?

Llamemos A, B, C, D y D^C, a los sucesos siguientes, “fábrica A”, “fábrica B”, “fábrica C”, "motor defectuoso" y "motor no defectuoso", respectivamente.

Datos del problema: p(A) =30% = 0’3; p(B) =20% = 0’2; p(C) =50% = 0’5; p(D/A) 5% = 0’05; p(D/B) = 20% = = 0’2, p(D/C) = 10% = 0’1.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Por el teorema de la Probabilidad Total:

Me piden **p(motor defectuoso) = p(D)** = p(A).p(D/A) + p(B).p(D/B) + p(C).p(D/C) =
= (0’3)·(0’05) + (0’2)·(0’2) + (0’5)·(0’1) **= 21/200 = 0’105**.
b)
Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C?

Me piden **p(sabiendo que el motor es defectuoso no lo haya producido la fábrica C)**.

Calculamos **p(sabiendo que el motor es defectuoso lo haya producido la fábrica C) = p(C/D)**, y después aplicamos el suceso contrario.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos: **p(C/D) =** $\frac{p(C\cap D)}{p(D)} = \frac{p(C)\cdot p(D/C)}{p(D)} = \frac{0'5\cdot 0'1}{0'105}$ **= 10/21.**

La probabilidad de que el motor es defectuoso no lo haya producido la fábrica C es “1 – p(C/D)” = = 1 – 10/21 = 11/21 ≅ 0’52381.

OPCIÓN B

1. Determinar los valores de a y b para que la función $f(x)=a\sqrt{3x+3}+b\sqrt{x-1}$ tenga un punto de inflexión en el punto (2 , 8) **(2,5 puntos)**

$$f'(x)=a\frac{3}{2\sqrt{3x+3}}+b\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{3a}{2\sqrt{3x+3}}+\frac{b}{2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3a}{\sqrt{3x+3}}+\frac{b}{\sqrt{x-1}}\right)$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-3a\frac{3}{2\sqrt{3x+3}}}{3x+3}+\frac{-b\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}\right)=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\frac{9a}{\sqrt{3x+3}}}{3x+3}+\frac{\frac{b}{\sqrt{x-1}}}{x-1}\right)=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9a}{(3x+3)\sqrt{3x+3}}+\frac{b}{(x-1)\sqrt{x-1}}\right)$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{9a(x-1)\sqrt{x-1}+b(3x+3)\sqrt{3x+3}}{(3x+3)(x-1)\sqrt{x-1}\sqrt{3x+3}}\right)$$

$$\begin{cases} f(2)=8\Rightarrow a\sqrt{3\cdot 2+3}+b\sqrt{2-1}=8\Rightarrow a\sqrt{9}+b=8\Rightarrow 3a+b=8 \\ f''(2)=0\Rightarrow 9a(2-1)\sqrt{2-1}+b(3\cdot 2+3)\sqrt{3\cdot 2+3}=0\Rightarrow 9a+27b=0\Rightarrow 9(a+3b)=0\Rightarrow a+3b=0\Rightarrow a=-3b \end{cases}$$

$$3\cdot(-3b)+b=8\Rightarrow -9b+b=8\Rightarrow -8b=8\Rightarrow b=-1\Rightarrow a=-3\cdot(-1)=3$$

2.- Considerar el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+ky+z=2 \\ x+y+kz=k-1 \end{cases}$

a) Estudiar el sistema para los distintos valores de **k** (1,5 puntos)
b) Resolver el sistema para **k = 1** (1 punto)

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&k&1\\1&1&k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&k-2&-1\\0&0&k-1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}k-2&-1\\0&k-1\end{vmatrix}=(k-2)(k-1)\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow (k-2)(k-1)=0\Rightarrow\begin{cases}k=1\\k=2\end{cases}$$

$$\forall k\in\Re-\{1,2\}\Rightarrow |A|\neq 0\Rightarrow rang\ (A)=3=Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$Si\ k=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&1&1&2\\1&1&1&0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=rang\ (A/B)=2<Número\ de\ incognitas\Rightarrow$$

$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$Si\ k=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&2&1&2\\1&1&2&1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&-1&2\\0&0&1&1\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&-1&2\\0&0&0&3\end{array}\right)\Rightarrow rang\ (A)=2\neq rang\ (A/B)=3\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

Continuación del Problema 2 de la opción A

$b)$

$$Si\ k=1 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$-y-z=2 \Rightarrow y+z=-2 \Rightarrow y=-2-z \Rightarrow x+(-2-z)+z=0 \Rightarrow x-2-z+z=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=(2\,,-2-\lambda\,,\,\lambda)$$

3.- Dadas las rectas $r_1 \equiv x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x+5}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{3}$, se pide

a) Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias. **(1,25 puntos)**

b) Hallar la ecuación del plano que determinan. **(1,25 puntos)**

a) Puestas las rectas en ecuaciones paramétricas, e igualando los valores de los puntos generales, tendremos un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Si la matriz de los coeficientes ampliada es nula y hay algún valor de la matriz de los coeficientes, de grado 2, no nula, el sistema es Compatible Determinado y las rectas son secantes y se cortan en un punto, de no haber ningún determinante de la matriz de los coeficientes de orden 2, el sistema es Compatible Indeterminado y la rectas se confunden.
Si la matriz del determinante de los coeficientes ampliados no es nulo el sistema es incompatible, si los vectores directores de la rectas son iguales o proporcionales, las rectas son paralelas, de no ser así se cruzarán.

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 \equiv \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{array}\right. \\ r_2 \equiv \left\{\begin{array}{l} x=-5+4\mu \\ y=3-2\mu \\ z=-4+3\mu \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+\lambda=-5+4\mu \\ 1-\lambda=3-2\mu \\ -2+2\lambda=-4+3\mu \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda-4\mu=-6 \\ \lambda-2\mu=-2 \\ 2\lambda-3\mu=-2 \end{array}\right. \Rightarrow |A/B|=\begin{vmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-2+4=2\neq 0 \Rightarrow Las\ rectas\ se\ cortan\ en\ un\ punto\ y,\ por\ ello,\ son\ coplanarias$$

b) El vector director del plano π es el producto vectorial de los vectores directores de las dos rectas, del que es perpendicular a ambos, y este es perpendicular al vector R_1G, siendo R_1 un punto cualquiera de la recta r_1 y G el punto genérico del plano, siendo el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación pedida del plano

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_{r_1}}=(1\,,-1\,,2) \\ \overrightarrow{v_{r_2}}=(4\,,-2\,,3) \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_{r_1}}\wedge\overrightarrow{v_{r_2}}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-3\vec{i}+8\vec{j}-2\vec{k}+4\vec{k}+4\vec{i}-3\vec{j}=\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}=(1\,,5\,,2)$$

$$Siendo\ R_1(1\,,1\,,-2)\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_\pi}=(1\,,5\,,2) \\ \overrightarrow{R_1G}=(x\,,\,y\,,\,z)-(1\,,1\,,-2)=(x-1\,,\,y-1\,,\,z+2) \end{array}\right. \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\perp\overrightarrow{R_1G} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}\cdot\overrightarrow{R_1G}=0$$

$$(1\,,5\,,2)\cdot(x-1\,,\,y-1\,,\,z+2)=x-1+5y-5+2z+4=0 \Rightarrow \pi \equiv x+5y+2z-2=0$$

4.- El 30% de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas elegidas, estuvieran viendo el concurso de televisión:
a) Tres o menos personas. (1,5 puntos)
b) Ninguna de las 10 personas a las que se ha llamado. (1 punto)

El 30% de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas elegidas, estuvieran viendo el concurso de televisión:
a)
Tres o menos personas.

Vemos que nuestra variable X sigue una binomial B(n,p) donde "n" es el nº de personas a las que se le llama por teléfono, en nuestro caso "n = 10", "p" la probabilidad de éxito, en nuestro caso el 30% de los habitantes ve el concurso de televisión, luego p = 130% = 0'3 y q = 1 – 0'3 = 0'7.

Tenemos una B(n,p) = B(10, 0'3)

Sabemos que la probabilidad de obtener k éxitos, que es su función de probabilidad, viene dada por:

$$p(X = k) = (n \text{ sobre } k).p^k.q^{(n-k)} = \binom{n}{k}.p^k.q^{(n-k)}.$$

En nuestro caso $p(X = k) = \binom{10}{k}\cdot(0'3)^k\cdot(0'7)^{10-k}$.

Me están pidiendo **p(X ≤ 3) =** p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) =

$$= \binom{10}{0}\cdot(0'3)^0\cdot(0'7)^{10} + \binom{10}{1}\cdot(0'3)^1\cdot(0'7)^9 + \binom{10}{2}\cdot(0'3)^2\cdot(0'7)^8 + \binom{10}{3}\cdot(0'3)^3\cdot(0'7)^7 =$$

= 0'0282475 + 0'1210608 + 0'2334744 + 0'2668279 **= 0'6496106.**
b)
Ninguna de las 10 personas a las que se ha llamado. (1 punto)

Me están pidiendo **p(X = 0) =** {calculado en el apartado (a)} = $\binom{10}{0}\cdot(0'3)^0\cdot(0'7)^{10}$ **= 0'0282475.**